

Los números enteros

Bloque 1. Tema 2

Los números enteros. Operaciones. Expresiones algebraicas. La medida. El sistema internacional de unidades

ÍNDICE

1. El número entero

- 1.1. Concepto
- 1.2. Representación de los enteros en la recta numérica
- 1.3. Valor absoluto de un número entero
- 1.4. Comparación y ordenación de números enteros
- 1.5. Opuesto de un número entero

2. Operaciones con números enteros

- 2.1. Suma de números enteros
 - 2.1. a. Suma de números enteros con el mismo signo
 - 2.1. b. Suma de números enteros con distinto signo
- 2.2. Resta de números enteros
- 2.3. Multiplicación de números enteros
- 2.4. División de números enteros

3. Expresiones algebraicas

4. La medida

- 4.1. Concepto
- 4.2. Magnitudes fundamentales y derivadas. El Sistema Internacional de Unidades
 - 4.2. a. Unidades de longitud
 - 4.2. b. Unidades de masa
 - 4.2. c. Unidades de volumen y capacidad
 - 4.2. d. Unidades de superficie
- 4.3. Instrumentos de medida

1. El número entero

1.1. Concepto

En la unidad anterior hemos trabajado y estudiado con los números naturales. Pero hay muchas situaciones que no se pueden expresar utilizando sólo los números naturales:

- Cuando en invierno decimos que la temperatura en cierto lugar es de 7 grados bajo cero.
- Si tenemos en el banco 2.000 euros y nos cobran un recibo de 3.000.
- Cuando decimos que cierto personaje nació en el año 546 antes de Cristo.
- Para expresar el nivel por debajo del mar o los sótanos de un edificio.

Para escribir todas estas expresiones los números naturales no son suficientes. Es necesario una referencia y una forma de contar a ambos lados de ésta. La referencia es el cero y los números que vamos a escribir a ambos lados son los números naturales precedidos del signo más o menos.

A todos estos números, los negativos, el cero y los positivos se les llaman **números enteros** y se representan por la letra **Z**:

$$Z = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \dots\}$$

Los **enteros positivos** se obtienen colocando el signo **+** delante de los números naturales.

Los **enteros negativos** se obtienen colocando el signo **-** delante de los números naturales.

Observa que los números enteros no son naturales (no existen -2 peras). Son números creados para referirse a situaciones en las que se marca un origen (que se considera valor **0**) que provoca un antes y un después, un delante y un detrás, un arriba y abajo.

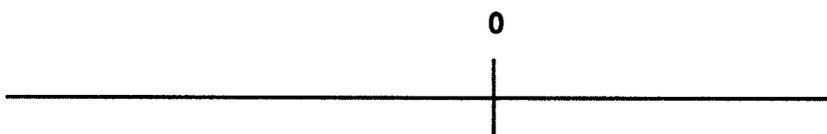
Como hemos visto al principio, los números enteros aparecen en muchas situaciones de la vida diaria:

- Para medir la temperatura por encima de 0 grados se indican con números enteros positivos, mientras que las temperaturas por debajo de 0 grados se indican con números enteros negativos. Ejemplo $+5^{\circ}$, -7°
 - Los saldos bancarios a nuestro favor se indican con los números enteros positivos, mientras que los que son en nuestra contra se indican con los números enteros negativos. Ejemplo, tenemos 2.000 euros, nos cobran en el banco -3.000 euros
 - Para referirnos a los años de nuestra era, es decir, a partir del nacimiento de Cristo, utilizamos los números enteros positivos, mientras que los años anteriores a su nacimiento los indicamos que los números enteros negativos. Ejemplo, cierto personaje nació en el año -546 a.C.
 - Para medir altitudes se considera 0 el nivel del mar, los niveles por encima del mar se pueden expresar por números enteros positivos, y los niveles por debajo del nivel del mar se pueden expresar por números enteros negativos.
 - Para señalar el número de plantas de un edificio en el ascensor. Utilizamos números negativos para las plantas que están por debajo de cero, es decir, para los sótanos o plantas subterráneas.

1.2. Representación de los enteros en la recta numérica

Para representar los números enteros en la recta numérica procedemos así:

1. Trazamos una línea recta y situamos en ella el 0.

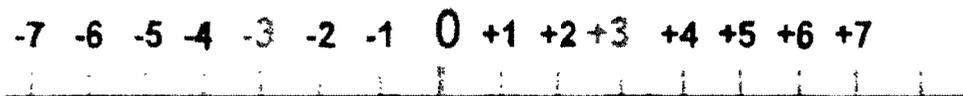


El 0 divide a la recta en dos semirrectas.

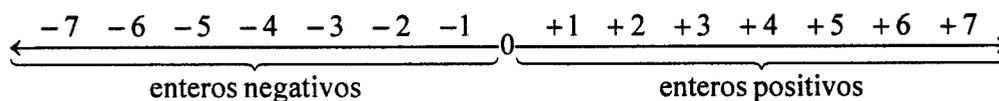
2. Dividimos cada una de las semirrectas en partes iguales:



3. Situamos los números enteros: los enteros positivos a la derecha del cero y los enteros negativos a la izquierda del cero:

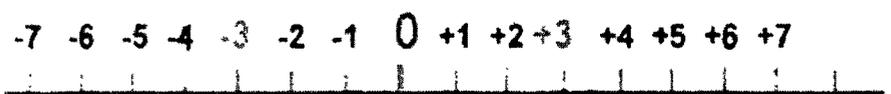


Es decir, quedaría de la siguiente forma:



1.3. Valor absoluto de un número entero

Observa la recta numérica:



Los números -6 y $+6$ se encuentran a la misma distancia del cero. Ocurre así porque los dos números están formados por el mismo número natural, el 6, aunque con distinto signo. Al número 6 se le llama **valor absoluto** de $+6$ y -6 .

El **valor absoluto** de un número entero es el número natural que resulta de prescindir del signo. El símbolo que se utiliza para representar el valor absoluto es el número escrito entre barras.

$$|+10| = 10 \quad |-5| = 5$$

1.4. Comparación y ordenación de números enteros

Los números enteros tienen un orden. Se cumplen las siguientes reglas:

- Cualquier entero positivo es **mayor que** cualquier entero negativo.
- El 0 es menor que cualquier positivo y mayor que cualquier negativo

- Dados dos números enteros positivos, es mayor el que tiene mayor valor absoluto. Ejemplo: $|+15| = 15$ $|+8| = 8$ $15 > 8$
- Dados dos números **enteros negativos**, es **mayor** el que tiene menor valor absoluto. Ejemplo: $|-15| = 15$ $|-8| = 8$ $15 < 8$

De todas formas, si te cuesta trabajo recordar estas reglas, no olvides esta otra que es aún más fácil:

- Para **comparar dos números enteros** los situamos en la recta numérica. El mayor de ellos es el que está situado más a la derecha en la recta numérica

1.5. Opuesto de un número entero

Aquellos números que se encuentran a la misma distancia del cero se les llaman **números opuestos**.

Observa que 4 y -4 se encuentran a la misma distancia de 0. Son simétricos respecto al 0.

Tienen el mismo valor absoluto, pero distinto signo.

$$\text{Op. } (4) = 4 \qquad \text{Op. } (-4) = 4$$

El opuesto de un número entero es aquel que tiene el mismo valor absoluto pero distinto signo.

2. Operaciones con números enteros

2.1. Suma de números enteros

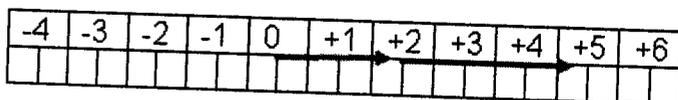
¿Quieres saber cómo se suman los números enteros?. Podemos distinguir varios casos:

2.1. a. Suma de números enteros con el mismo signo

Supongamos que estamos en la segunda planta de unos grandes almacenes. Si subimos tres plantas más ¿En que planta nos encontramos ahora?

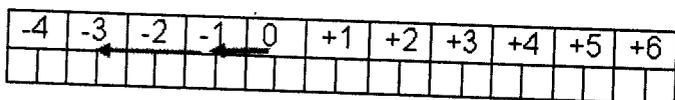
La respuesta es en la quinta planta. La operación que hemos realizado es una suma de números enteros:

$(+2) + (+3) = (+5)$. También se puede escribir como $2 + 3 = 5$



¿Y si nos encontramos en el primer sótano y bajamos dos plantas más? ¿Dónde estamos ahora? De nuevo hay que hacer una suma de números enteros:

$(-1) + (-2) = (-3)$ ó $-1 - 2 = -3$. Estamos en el tercer sótano.



Para sumar números enteros de igual signo, se suman sus valores absolutos y se pone el signo de los sumandos.

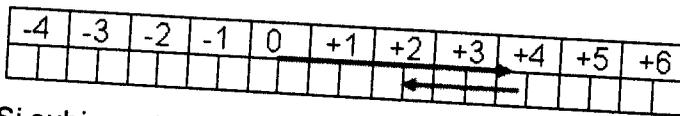
Date cuenta que:

- La suma de dos números enteros negativos es otro número negativo.
- La suma de dos números enteros positivos es otro número entero positivo.

2.1. b. Suma de números enteros con distinto signo

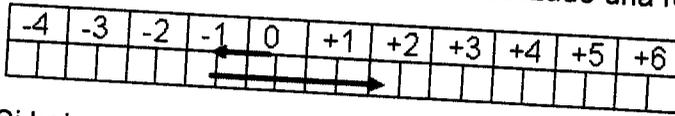
Si nos encontramos en la cuarta planta y bajamos dos plantas. ¿Dónde estamos?

$(+4) + (-2) = (+2)$. Si te das cuenta hemos realizado una resta $4 - 2 = 2$



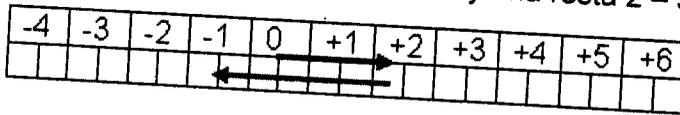
Si subimos tres plantas desde el sótano nos encontraríamos en la planta dos.

$$(-1) + (+3) = (+2). \text{ También hemos realizado una resta } -1 + 3 = 2$$



Si bajamos tres plantas desde la segunda habríamos llegado al primer sótano.

$$(+2) + (-3) = (-1). \text{ Aquí también hay una resta } 2 - 3 = -1$$



Para sumar números enteros de distinto signo, se restan sus valores absolutos y se pone el signo del mayor.

Si lo que tenemos es una suma de varios números enteros de distinto signo, lo que haremos será:

- Se suman separadamente los números positivos, por un lado y los negativos por el otro.
- Se suman el número positivo y el número negativo obtenido.

Ejemplo: Vamos a calcular el resultado de esta suma:

$$(+4) + (-2) + (+3) + (+5) + (-6) = (+12) + (-8) = +4$$

2.2. Resta de números enteros

Adrián debe a su hermano Carlos 420 euros. Esto lo expresamos matemáticamente diciendo que Adrián tiene **-420 euros**.

También debe a su hermano Raúl 60 euros. Escribimos **-60 euros**.

¿Cuánto debe en total Adrián? Para saberlo, sumamos las dos deudas:

$$-420 + (-60) = -480 \text{ euros.}$$

Su hermano Raúl le ha perdonado su parte de la deuda: 60 euros. ¿Cuánto debe ahora Adrián? Para saberlo, del total de la deuda hay que quitar lo que le ha perdonado su hermano:

$$-480 - (-60) = -480 + 60 = -420 \text{ euros.}$$

Fijate cómo se restan los números enteros: **Para restar dos números enteros se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.**

Observa que de esta forma la resta de números enteros se transforma en una suma:

- $(-5) - (+7) = (-5) + (-7) = -12$
- $(+4) - (-6) = (+4) + (+6) = +10$
- $(-3) - (-7) = (-3) + (+7) = +4$

¿Y qué ocurre cuando hay un paréntesis?

Para restar un número entero, si este está dentro de un paréntesis, se cambia el signo del número.

Date cuenta que el **signo (-)** puede tener dos significados:

- a) Puede indicar que un número es negativo (signo de número). Ejemplo: - 8.
- b) Puede indicar una resta (signo de operación). Así, en $14 - (-6)$ el primer signo menos, el que está antes del paréntesis -, es de operación (resta), mientras que el segundo -, es de número.

En la primera unidad vimos que el paréntesis nos indica qué operaciones tenemos que realizar primero. Para realizar la operación $7 + (5 - 16)$, lo hacemos así:

- a) Primero hacemos la operación indicada dentro del paréntesis.
- b) Si delante del paréntesis tenemos un signo +, no cambiamos el signo del resultado de efectuar las operaciones del paréntesis.
- c) Pero si delante del paréntesis hay un signo -, cambiamos de signo el resultado del paréntesis.

Lo mismo ocurre si hay corchete. Por tanto, la operación anterior quedaría así:

$$7 + (-11) = 7 - 11 = -4$$

Vamos a hacer la misma operación, pero con un signo - delante del paréntesis:

$$7 - (5 - 16) = 7 - (-11) = 7 + 11 = +18$$

2.3. Multiplicación de números enteros

Supuesto 1. El día de hoy a las seis de la mañana había una temperatura de 5°C . Cada hora la temperatura aumenta 2°C . ¿Qué temperatura habrá a las diez de la mañana?

Entre las seis y las diez han transcurrido cuatro horas y el incremento de temperatura será de 8°C . La temperatura que habrá será de 13°C .

Las operaciones que hemos realizado son una multiplicación y una suma de números enteros: $(+4) \cdot (+2) = (+8)^{\circ}\text{C}$ y $(+5) + (+8) = (+13)^{\circ}\text{C}$



Supuesto 2. Si la temperatura hubiese disminuido dos grados cada hora, la bajada sería de -8°C . Luego la temperatura sería de -3°C . Las operaciones a realizar son: $(+4) \cdot (-2) = (-8)^{\circ}\text{C}$ y $(+5) + (-8) = (-3)^{\circ}\text{C}$

Supuesto 3. También se puede plantear diciendo que son las 10 de la mañana y si desde hace cuatro horas la temperatura ha aumentado 2°C por hora significaría que hace cuatro horas había 8 grados menos, luego la operación es: $(-4) \cdot (+2) = (-8)^{\circ}\text{C}$ y la temperatura a la que estábamos era $(+5) + (-8) = (-3)^{\circ}$

Supuesto 4. Si desde hace cuatro horas la temperatura ha bajado 2°C por hora significaría que la temperatura era 8°C mayor que la que tenemos ahora: $(-4) \cdot (-2) = (+8)^{\circ}\text{C}$ luego había $(+5) + (+8) = (+13)^{\circ}\text{C}$

Para hallar el producto de dos números enteros hay que multiplicar sus valores absolutos. El signo del resultado es positivo cuando ambos números o factores tienen el mismo signo y negativo cuando tienen signos diferentes.

Ejemplos de producto de enteros con el mismo signo:

$$(+5).(+3) = +15 \qquad (-5).(-3) = +15$$

Ejemplos de producto de enteros con distinto signo:

$$(+5).(-3) = -15 \qquad (-5).(+3) = -15$$

Se suele recurrir a la siguiente **regla de los signos**:

+	.	+	=	+
-	.	-	=	+
+	.	-	=	-
-	.	+	=	-

2.4. División de números enteros

¿Cuánto baja la temperatura cada hora si en cuatro horas ha bajado -8°C ? La respuesta es -2°C .

La operación ha realizar es una división $(-8) : (+4) = (-2)^{\circ}\text{C}$

Para dividir dos números enteros se dividen sus valores absolutos. El cociente tiene signo positivo si los dos números o factores tienen el mismo signo y signo negativo si tienen diferentes signos.

Se sigue la misma regla de los signos que para el producto.

Se proponen a continuación algunos problemas sobre números enteros.

3. Expresiones algebraicas

Para encontrar el dato desconocido (o incógnita) de un problema, conviene a veces sustituirlo por una letra y operar con ella como si de un número más se tratara. Cuando en las operaciones se utilizan números y letras se dice que se usa un **lenguaje algebraico**.

Ejemplos de expresiones algebraicas:

Usando palabras

Un número x es 4 unidades mayor que y

El número x es 6 veces el número y

El doble de x más 3 es 18

Lenguaje algebraico

$$x = y + 4$$

$$x = 5 \cdot y$$

$$2x + 3 = 18$$

Las letras se utilizan mucho en matemáticas. Por ejemplo, para representar cualquier número par, se usa la expresión $2n$, donde n se puede sustituir por cualquier número natural. Si pruebas a hacerlo, siempre obtendrás un número par. De la misma forma, para representar cualquier número impar se utiliza la expresión $2n + 1$.

Cuando una letra representa a un único número, pero desconocido se la llama **incógnita**. Se suelen utilizar en la resolución de ecuaciones, que estudiaremos en el siguiente módulo.

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el número que resulta de sustituir las letras por números y realizar a continuación las operaciones que se indican.

Ejemplos:

Calculamos el valor numérico de la expresión algebraica $2 \cdot x + 3$ cuando $x = 1$

$$\text{Para } x = 1: 2 \cdot x + 3 = 2 \cdot 1 + 3 = 2 + 3 = 5$$

Calculamos el valor numérico de la expresión algebraica $3 \cdot a + 5 \cdot b$ cuando $a = -1$ y $b = 2$

$$\text{Para } a = -1, b = 2: 3 \cdot a + 5 \cdot b = 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 = -3 + 10 = 7$$